Stabilité Hydrodynamique. MSF21
J. Hoepffner
Université Pierre et Marie Curie.
Examen final 2014-2015.
Durée: 2 heures, aucun document autorisé.
La note tiendra compte de la présentation.

Ex6

Question de cours

Remplissez les étapes manquantes pour l'obtention de la relation de dispersion

System matrices

In the following, we consider a fluid at rest between two infinite horizontal plates. The base flow is thus 0, and if we linearize the Navier-Stokes equations and continuity about this zero base flow we get the system

$$\rho u_t = -p_x + \mu \Delta u$$
$$\rho v_t = -p_y + \mu \Delta v$$
$$u_x + v_y = 0.$$

...

If we insert this assumption into the equations, we get rid of all the derivatives

$$s\rho \hat{u} = -i\alpha \hat{p} - \mu(\alpha^2+\beta^2)\hat{u}$$
$$s\rho \hat{v} = -i\beta \hat{p} - \mu(\alpha^2+\beta^2)\hat{v}$$
$$i\alpha \hat{u} + i\beta \hat{v} = 0$$

And we call $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

...

so that at the end we get

$$s = -\frac{\mu}{\rho} k^2$$

http://basilisk.fr/sandbox/easystab/wave_like.m

Ex4

Questions de cous:

1) Expliquez ce que c'est qu'une «direction invariante par translation» et en quoi cela nous permet de simplifier l'approche de la stabilité d'un système fluide.
2) Definissez ce que c'est qu'un «état stationnaire». Pourquoi en stabilité, étudions nous des états stationnaires?
3) Donnez en mécanique du solide rigide trois exemples de systèmes stables et trois exemples de systèmes instables.
4) Donnez un exemple de système en mécanique des fluides qui peut passer de stable à instable lorsqu'un paramètre varie. Expliquer le mécanisme de déstabilisation.
5) Qu'est-ce que c'est que l'instabilité de Rayleigh-Taylor? Qu'est-ce que c'est que l'instabilité de Rayleigh-Bénard?

Ex4

Périodicité

Expliquez pourquoi cette matrice de dérivation convient à un domain périodique

$$\begin{pmatrix} f_{x,1} \\ f_{x,2} \\ \vdots \\ f_{x,N-1} \\ f_{x,N} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\Delta x} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}$$

http://basilisk.fr/sandbox/easystab/periodicals%20boudaries.m

Ex5

Formulation matricielle

1) Ecrivez ce système sous la forme d'une seule équation pour f.

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_t \\ f_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\beta}\partial_x & \partial_{xxxx} + (1-ksi)\partial_{xx} \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ f \end{pmatrix}$$

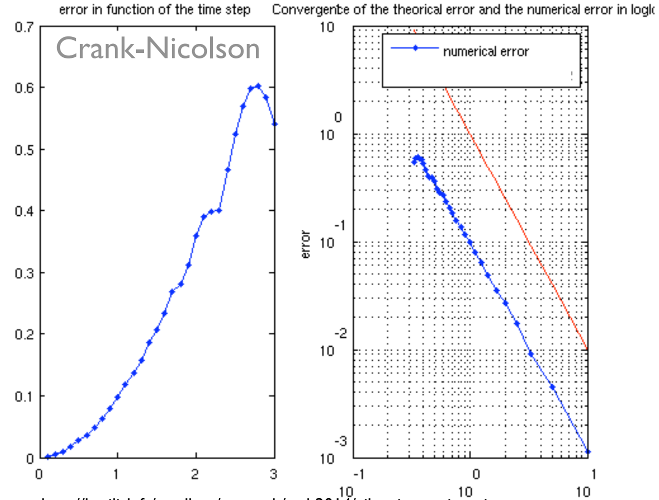
Ex2

Ordre d'un schéma numérique

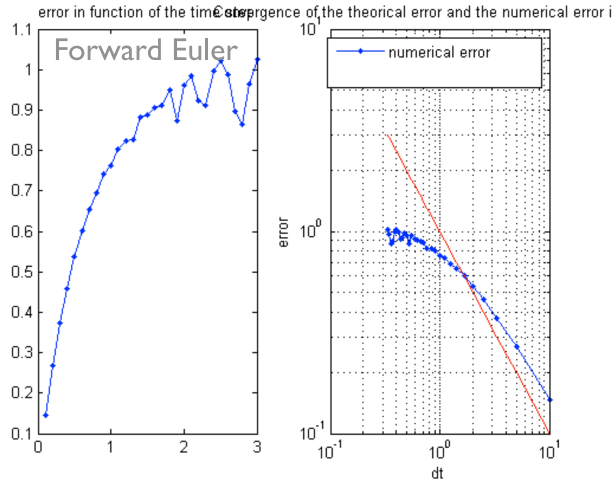
D'après ce graphique, quel est l'ordre de la méthode de Crank-Nicolson? Et celui de «forward Euler?

Convergence study of the time step

Done by Alexandre Bilczewski and Fadil Boodoo. In this work, we do a convergence study of the time step of the code vibrating_string.m
The scheme used for the march in time is Crank-Nicolson.



http://basilisk.fr/sandbox/easystab/stab2014/vibrating_string_time_convergence



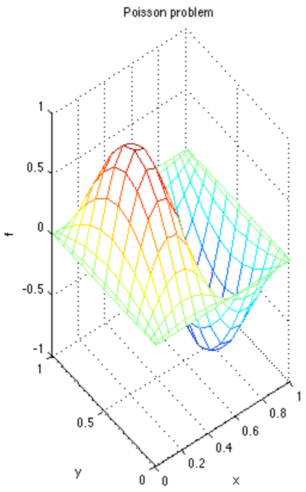
convergence time with a backward euler scheme

http://basilisk.fr/sandbox/easystab/stab2014/vibrating_string_convergence_time_euler_backward.m

Ex3

Wavelike assumption

Grâce à la méthode «wavelike» expliquez la formule de la solution théorique de ce problème de Poisson.



The exact solution

We do a Poisson problem with periodic boundary conditions and with a forcing term b

$\Delta f = b$

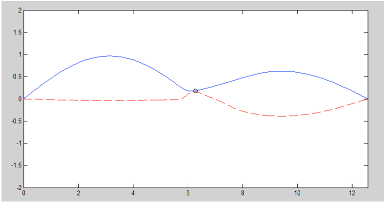
and the forcing is

$b = -\pi^2(k^2+l^2)\sin(\pi k x)\sin(\pi l y)$

and the exact solution is

$f = \sin(\pi k x)\sin(\pi l y)$

http://basilisk.fr/sandbox/easystab/poisson2D.m



Ex1

Deux cordes vibrantes connectées par une masse

t1 est la tension dans la corde 1 et t2 la tension dans le corde 2. Expliquez la structure des matrices E, A et C. Montrez qu'il s'agit bien de deux cordes vibrantes, expliquez comment elles sont connectées, expliquez comment est modélisée la présence de la masse.

http://basilisk.fr/sandbox/easystab/stab2014/two_strings.gif

System matrices

each strings follows the same equation, $v_t = c^2 f_{xx}$ and the mass follows its own equation, $m v_t = -t_1(\partial_x f_1)|_L + t_2(\partial_x f_2)|_0$. With, for each string and the mass, $f_t = v$ .Thus the new array representation for the system is

$$Eq_t = Aq$$

with the state matrices E and A and the state q defined as

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} I & & & & & \\ & I & & & & \\ \hline & & I & & & \\ & & & I & & \\ \hline & & & & m & \\ & & & & & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} v1_t \\ f1_t \\ v2_t \\ f2_t \\ vm_t \\ fm_t \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & c_1^2\partial_{xx} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c_2^2\partial_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -t_1\partial_x|_L & 0 & t_2\partial_x|_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} v1 \\ f1 \\ v2 \\ f2 \\ vm \\ fm \end{pmatrix}$$

Boundary conditions

We consider that the two strings are fixed at their extremity, $f_1|_0 = 0 = f_2|_L$, and they are connected to the mass, $f_1|_L = f_2|_0 = f_m$.

The boundary condition can thus be expressed $Cq = 0$ with the state q and the constraint matrix C

$$Cq = 0 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & I|_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I|_L & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & I|_0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & I|_L & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ f_1 \\ v_2 \\ f_2 \\ vm \\ fm \end{pmatrix},$$