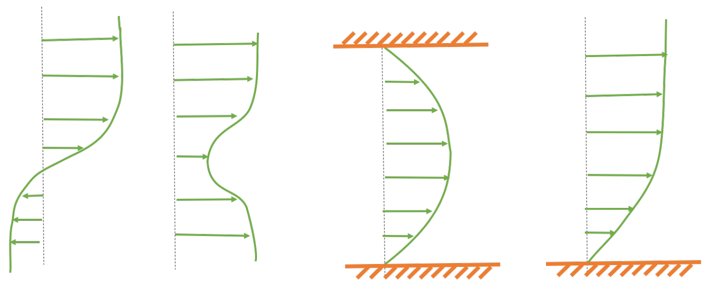
Examen de seconde session du cours d'instabilité, M2R DET, 7 février 2019

Durée 2 heures. La qualité de la présentation de la copie sera prise en compte.

Documents autorisés : tous documents manuscrits.

1 Question de cours



(a) (b) (c) (d)

On considère 4 exemples d'écoulement parallèle d'un fluide incompressible représentés par les profils (a), (b), (c), (d) ci-dessus. Pour chacun des cas, expliquez la signification physique de l'écoulement (dans quels contextes ou applications ce type d'écoulement est-il rencontré) puis discutez ses propriétés de stabilité. A quel type d'instabilités peut-on s'attendre ? Argumentez en vous basant sur les notions vues en cours (notamment les critères classiques de stabilité).

2 Modèle de Lorenz de la convection de Rayleigh-Bénard

Le système de Lorenz est une modélisation extrême de la convection thermique de Rayleigh-Bénard, qui reproduit certains comportements observés expérimentalement, notamment l'apparition de rouleaux de convection au-delà d'une valeur critique du nombre de Rayleigh. Ce système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -Px + Py \\ \dot{y} &= -y + rx - zx \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned}$$

1. Rappelez le lien entre ce système et la convection de Rayleigh-Bénard. Que représentent les 3 variables dynamiques x, y, z ? A quoi correspondent les paramètres r, P et b ?
   Dans la suite on prendra les valeurs classiques $P = 10$ et $b = 8/3$ et on considèra r comme paramètre de contrôle.
2. Etudiez la stabilité de la solution triviale $[x, y, z] = [0, 0, 0]$. Montrez que celle-ci subit une bifurcation pour $r > 1$. De quel type de bifurcation s'agit-il ?
3. Déterminer les points fixes non triviaux (notés $[x_p, y_p, z_p]$) du système apparaissant pour $r > 1$. A quelles structures d'écoulement du problème de convection ces solutions correspondent-elles ?
4. Etudiez la stabilité linéaire des points fixes apparaissant pour $r > 1$ en posant $[x, y, z] = [x_p, y_p, z_p] + \epsilon[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]e^{\lambda t}$ avec $\epsilon \ll 1$.
   Ecrire le polynôme caractéristique dont les racines sont les valeurs propres λ.
5. On admettra que le polynôme écrit précédemment a trois solutions, dont l'une est réelle et négative, et les deux autres complexes conjuguées de partie réelle négative lorsque $r < 24,74$ et positive lorsque $r > 24.74$. A quel type de bifurcation peut-on s'attendre ?
6. Décrire en quelques mots la nature des solutions rencontrées pour $r > 24.74$ et la signification physique de ces solutions pour le problème de convection.

3 Instabilité d'une couche de mélange d'épaisseur nulle entre deux fluides non miscibles de même densité

On étudie une couche de mélange (discontinuité de vitesse) entre deux fluides *non miscibles* mais *de masse volumique ρ identique* .

Par exemple le demi-espace $y < 0$ est rempli d'huile de parafine de vitesse $u = -U$ et le demi-espace $y > 0$ est rempli d'alcool de vitesse $u = +U$ (deux liquides de densité sensiblement égale).

On note γ la tension de surface ; les masses volumiques étant identiques *on pourra négliger la gravité* .

On souhaite étudier la stabilité linéaire de perturbations de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$ dans la direction x. On suppose pour cela que l'interface est déplacée d'une amplitude $y = \eta(x,t) = Ce^{ikx-i\omega t} + c.c.$.

On admettra que la courbure d'une interface ainsi définie est donnée par $K \approx \partial^2\eta/\partial x^2$.

1. Montrez que des perturbations de nombre d'onde k dans la direction x sont gouvernées par la relation de dispersion suivante :
$$(kU+\omega)^2 + (kU-\omega)^2 - \frac{\gamma}{\rho}k^3 = 0 \qquad (1)$$
Vous utiliserez la démarche de votre choix pour établir cette relation mais veillerez à bien préciser et justifier les hypothèses faites dans la modélisation.
2. Représentez graphiquement ω_i en fonction de k et $c_r = \omega_r/k$ en fonction de k.
3. Montrez qu'on a deux régimes différents correspondant à $k < k_c$ et $k > k_c$ avec $k_c = 2\rho U^2/\gamma$. Interprétez physiquement chacun de ces deux régimes.
4. Calculez la longueur d'onde $\lambda_{\max}$ correspondant au mode le plus amplifié, ainsi que le taux d'amplification $\omega_{i,max}$ correspondant.

4 Evolution d'une population animale : étude de stabilité

On étudie l'équation aux dérivées partielles suivante, gouvernant l'évolution de la fonction scalaire $\phi(x,t)$, définie dans l'intervalle $x \in [-L, L]$ et $t \in [0, \infty]$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U\frac{\partial \phi}{\partial x} = \sigma(x)\phi + k\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \qquad (\alpha > 0) \qquad (2)$$

associée aux conditions limites $\phi(-L,t) = \phi(+L,t) = 0$ et à la condition initiale $\phi(x,0) = \phi_0(x)$.

Ce modèle peut décrire par exemple l'évolution d'une population de micro-organisme dans une rivière, en présence d'une source de nourriture $\sigma(x)$ inhomogène, les bactéries subissant de plus une diffusion due à leurs déplacements aléatoires (modélisée par le terme de dérivée seconde) ainsi qu'une advection par le courant moyen (de vitesse uniforme U).

On cherche à étudier la stabilité de ce problème à l'aide d'une approche de stabilité linéaire, en considérant des perturbations modales de la forme $\phi(x,t) = \hat{\phi}(x)e^{\lambda t}$.

1. Proposez une stratégie de résolution numérique du problème linéaire précédent, permettant de ramener l'étude à la recherche de valeurs propres d'une matrice A.
(On ne demande pas d'écrire un programme complet mais d'expliquer comment construire la matrice A et de préciser les principales étapes de la résolution numérique).
2. Dans le cas où il existe une valeur propre λ de partie réelle positive, que prédit la solution linéaire ? Comment pourrait-on améliorer le modèle pour corriger ce défaut ?